2.5.10 Přímá úměrnost

Předpoklady: 020508

Př. 1: 1 kWh hodina elektrické energie stojí typicky 4,50 Kč. Doplň do tabulky kolik Kč stojí různá množství objednané elektrické energie. Zkus v tabulce najít zajímavé zákonitosti.

energie [kWh]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	*n*
cena [Kč]											

energie [kWh]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	*n*
cena [Kč]	0	4,5	9	13,5	18	22,5	27	31,5	36	45	$4,5 \cdot n$

V druhém řádku neustále přičítáme stejné číslo.
Každá druhá hodnota v druhém řádku je celé číslo (navíc násobek devíti).

Dodatek: Cena elektrické energie se počítá složitěji. Kromě platby za odebrané kWh (kterou se zabýváme v našem příkladu) odběratelé platí i za odběrné místo (poplatek za jistič), který je pravidelnou měsíční platbou nezávislou na odebraném množství elektrické energie.

Pedagogická poznámka: Zákonitosti, které žáci naleznou, se většinou týkají pouze druhé řádky tabulky, většina z nich nehledá souvislosti s první řádkou (která je tím, že obsahuje přirozená čísla, nezajímavá).
Úmyslně se je v tomto okamžiku nesnažím navádět na přímou úměrnost, aby si zkusili najít co nejvíce zajímavého sami.

Pedagogická poznámka: Žákům rozdávám milimetrový papír, měřítko si volí samostatně, většina z nich zvolí za kWh velký čtvereček. Na svislé ose pak velký čtvereček představuje 4,50 Kč.

Př. 2: Narýsuj graf závislosti zaplacených peněz na množství odebraných kWh. Odebrané kWh vynášej na vodorovnou osu, zaplacené peníze na svislou. Měřítko zvol tak, abys rozumně využil plochu grafu a zároveň zobrazil všechny hodnoty v tabulce. Jak graf vypadá?

Grafem je přímka. Všechny body leží v řadě.

Př. 3: Když se množství odebrané energie zvětšilo z 1 kWh na 2 kWh (tedy zvětšilo se dvakrát), zvětšila se dvakrát i zaplacená energie. Najdi jiné dvojice sloupců, mezi kterými se množství energie zvětšilo dvakrát a sleduj, kolikrát se zvětšila cena.

Vždy, když se množství odebrané energie zvětší dvakrát, zvětší se dvakrát i zaplacená cena.

energie [kWh]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	*n*
cena [Kč]	0	4,5	9	13,5	18	22,5	27	31,5	36	45	$4{,}5 \cdot n$

energie [kWh]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	*n*
cena [Kč]	0	4,5	9	13,5	18	22,5	27	31,5	36	45	$4{,}5 \cdot n$

energie [kWh]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	*n*
cena [Kč]	0	4,5	9	13,5	18	22,5	27	31,5	36	45	$4{,}5 \cdot n$

Př. 4: Kolikrát se zvětší cena, když se množství odebrané energie zvětší třikrát? Jaký je vztah mezi tím kolikrát se zvětší (zmenší) množství energie a kolikrát se zvětší zaplacená cena?

Když se množství energie zvětší třikrát, zvětší se třikrát i zaplacená cena.

energie [kWh]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	n
cena [Kč]	0	4,5	9	13,5	18	22,5	27	31,5	36	45	$4,5\cdot n$

Obecně platí: **Kolikrát se zvětší množství odebrané energie, tolikrát se zvětší zaplacená cena.**

Př. 5: Všechny sloupečky tabulky se shodují v jedné věci. Ve které?

Přechod od jednoho sloupce ke druhému připomíná rozšiřování (krácení) zlomků $\Rightarrow$ všechny sloupce reprezentují stejný zlomek $\Rightarrow$ všechny sloupečky tabulky se shodují v poměru $cena : energie$ (a samozřejmě také $energie : cena$).

energie [kWh]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	n
cena [Kč]	0	4,5	9	13,5	18	22,5	27	31,5	36	45	$4,5\cdot n$
$cena : energie$		4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5

Cena zaplacená za elektrickou energii je přímo úměrná (nebo závislá přímo úměrně) na množství spotřebované energie. Čím více energie spotřebujeme, tím více za ní musíme zaplatit.

Závislost dvou přímo úměrných veličin označujeme jako přímo úměrnost. Dvě veličiny jsou přímo úměrné, jestliže platí, že kolikrát se zvětší jedna veličina, tolikrát se zvětší i druhá. Poměr obou veličin tak zůstává stálý.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je velmi důležitý. Pokud nestihneme jeho kontrolu v hodině, dostanou žáci jeho promyšlení za domácí úkol, který kontrolujeme na začátku hodiny příští. Rozebírání podmínek, které musí být splněny, aby závislost byla přímou úměrností, je pro příklad zásadní a budoucí řešení trojčlenek zásadní.

Př. 6: Jsou uvedené veličiny přímo úměrné? Pokud jsou veličiny přímo úměrné jen za určitých podmínek, uveď za jakých.
a) počet kusů nakoupeného zboží stejného druhu a zaplacená částka,
b) věk a tělesná výška,
c) spotřebovaný benzín a vzdálenost, kterou ujedeme,
d) doba, po kterou jsme na výletě, a počet kolemjdoucích, které potkáme,
e) délka strany rovnostranného trojúhelníku a jeho obvod,
f) počet kroků a vzdálenost, kterou ujdeme.

a) počet nakoupeného zboží stejného druhu a zaplacená částka
Pokud za každý kus zboží platíme stejnou cenu (nejsou množstevní slevy), jsou obě veličiny přímo úměrné (čím víc nakoupíme, tím víc zaplatíme).

b) věk a tělesná výška
Veličiny nejsou přímo úměrné, od určitého věku lidé nerostou (i před tím však rostou nerovnoměrně). Pokud by obě veličiny byly přímo úměrné, museli by čtyřicátníci být dvakrát větší než dvacátníci.

c) spotřebovaný benzín a vzdálenost, kterou ujedeme
Pokud jedem ve stejném terénu, stejným způsobem a nemění se okamžitá spotřeba automobilu, jsou obě veličiny přímo úměrné.

d) doba, po kterou jsme na výletě, a počet kolemjdoucích, které potkáme
Veličiny nejsou přímo úměrné, počet kolemjdoucích hodně závisí na tom, kde jdeme. O přímou úměrnost by šlo v případě, že bychom se pohybovali v místech, kde je pořád stejně lidí (a potkávali bychom je pravidelně – například každých pět sekund jednoho).

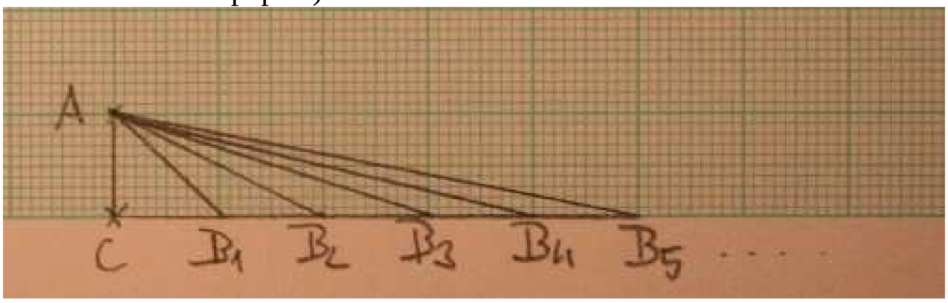
e) délka strany rovnostranného trojúhelníku a jeho obvod
Veličiny jsou přímo úměrné. Obvod je trojnásobek délky strany a kolikrát se zvětší délka strany, tolikrát se zvětší i obvod trojúhelníku.

f) počet kroků a vzdálenost, kterou ujdeme.
Pokud děláme stále stejně velké kroky, jsou obě veličiny přímo úměrné (čím více kroků uděláme, tím větší vzdálenost ujdeme).

Pedagogická poznámka: Následující příklad je pouze pro rychlejší žáky. Ani ho ve třídě společně nekontrolujeme. Řešení si mohou výrazně ulehčit milimetrovým papírem, na který kreslili graf.

Př. 7: Je dán pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem γ. Strana *AC* má délku 1 cm. Délka strany *BC* se může měnit. Je v tomto trojúhelníku délka strany *AB* přímo úměrná velikosti strany *BC*? Je délce strany *BC* přímo úměrná velikost úhlu α?

Narýsujeme si několik takových trojúhelníků (rýsování můžeme obejít tím, že budeme měřit na milimetrovém papíru).



$\|BC\|$	1	2	3	4	5	6	7
$\|AB\|$	1,4	2,2	3,2	4,1	5,1	6,1	7,1

Nemuseli jsme měřit tolik trojúhelníků, stačily by první dva (nebo libovolné jiné dva) sloupce. Mezi prvním a druhým sloupcem se délka strany *BC* zvětšila dvakrát, ale délka strany *AB* jen 1,58 krát $\Rightarrow$ délka strany *AB* není přímo úměrná délce strany *BC*.

Shrnutí: Dvě veličiny, pro které platí, že kolikrát se zvětší jedna, tolikrát se zvětší i druhá, označujeme jako přímo úměrné.